

Dans les exercices 1, 2 et 3, on **ne demande pas** de traiter la terminaison.

1 Exercice (4pts)

Montrer les triplets suivants (on demande dans cet exercice de préciser à chaque étape quelle règle du calcul de Hoare est appliquée).

1.1

```
{x ∈ ℕ} x := x + 2 ; y := x * x {y > 3}
```

1.2

```
{x, y ∈ ℕ} x := x + 1 ; y := x * (y + 2) {y > x}
```

1.3

```
{ x ≥ 0 }  
if x = 0 then x := x + 1 else x := x * x endif  
{ x > 0 }
```

2 Exercice (6 pts)

2.1

Montrer le triplet suivant (on précisera et prouvera l'invariant de boucle utilisé).

```
{ n ∈ ℕ }  
while n ≥ 2  
do n := n - 2 done  
{ n = 0 ∨ n = 1 }
```

2.2

Mêmes questions avec le triplet ci-dessous :

```
{ p ∈ ℕ }  
n := p;  
while n ≥ 2  
do n := n - 2 done  
{ p est pair si et seulement si n = 0 }
```

3 Exercice (5pts)

Soient a et b deux tableaux de taille $n \geq 1$. On considère le programme suivant :

```
int i := 0;  
while i < n  
do  
  b[i] := a[n-i-1];  
  i := i+1  
done
```

3.1

Décrire informellement ce que fait ce programme.

3.2

Proposer une post-condition et un invariant de boucle utile pour prouver votre affirmation. (On ne demande pas de preuve complète dans cet exercice. Les justifications se feront en français.)

4 Exercice (5pts)

Démontrer que le programme suivant termine (ne boucle jamais) :

```
{  $n \in \mathbb{N} \wedge p \in \mathbb{N}$  }  
while  $n > 0 \wedge p > 0$   
do  
  if  $n < p$   
  then  $p := p - n$   
  else  $n := n - p$   
endif  
done
```

5 Annexe : Règles du Calcul de Hoare

5.1 Règles de base

5.1.1 Instruction vide

$$\frac{}{\{P\} \text{ skip } \{P\}}$$

5.1.2 Affectation $x := e$

$$\frac{}{\{P[e/x]\} x := e \{P\}}$$

5.1.3 Composition $S;T$

$$\frac{\{P\} S \{R\} \quad \{R\} T \{Q\}}{\{P\} S ; T \{Q\}}$$

5.1.4 Règle de la conséquence

$$\frac{P \Rightarrow P_1 \quad \{P_1\} S \{Q_1\} \quad Q_1 \Rightarrow Q}{\{P\} S \{Q\}}$$

5.1.5 Règle de la conditionnelle

$$\frac{\{P \wedge b\} S \{Q\} \quad \{P \wedge \neg b\} T \{Q\}}{\{P\} \text{ if } b \text{ then } S \text{ else } T \text{ endif } \{Q\}}$$

5.1.6 Règle pour la boucle **while**

$$\frac{\{P \wedge b\} S \{P\}}{\{P\} \text{ while } b \text{ do } S \text{ done } \{P \wedge \neg b\}}$$

5.2 Règles utiles

5.2.1 Conjonction des post-conditions

$$\frac{\{P\} S \{Q\} \quad \{P\} S \{R\}}{\{P\} S \{Q \wedge R\}}$$

5.2.2 Disjonction des pré-conditions

$$\frac{\{P\} S \{R\} \quad \{Q\} S \{R\}}{\{P \vee Q\} S \{R\}}$$

5.2.3 Invariant de boucle

$$\frac{P \Rightarrow \text{Inv} \quad \text{Inv} \wedge \neg b \Rightarrow Q \quad \{\text{Inv} \wedge b\} S \{\text{Inv}\}}{\{P\} \text{ while } b \text{ do } S \text{ done } \{Q\}}$$